



## Erfahrungsbericht zum Lehrlabor-Projekt:

# Tutorenschulung in der Mathematik<sup>1</sup> Entwicklung und Evaluation einer fachspezifischen Tutorenschulung im Fach Mathematik

---

### Projektverantwortliche und Autorinnen und Autoren:

Prof. Dr. Andrea Blunck  
andrea.blunck@math.uni-hamburg.de  
Lukas Hodel

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften

---

April 2019

Das Universitätskolleg wird aus Mitteln des BMBF unter dem Förderkennzeichen 01PL17033 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Herausgebern und Autorinnen und Autoren.



GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium  
für Bildung  
und Forschung

---

<sup>1</sup>Dieser Text ist eine aktualisierte, z. T. gekürzte und im Hinblick auf die Zielgruppe überarbeitete Fassung von [3].

## ABSTRACT

Hier wird über zwei Tutorenschulungen am Fachbereich Mathematik berichtet, die sich auf die Methoden der Mathematik und dabei insbesondere auf die in mathematischen Beweisen verwendeten heuristischen Strategien fokussieren. Diese Strategien dienen einerseits dem Verständnis des Zustandekommens mathematischer Beweise, geben also eine mögliche Antwort auf die Frage „Wie kommt man darauf?“. Andererseits können aufgrund dieser Strategien gute Hilfen beim Lösen mathematischer Probleme formuliert werden, die zwar Hinweise darauf geben, wie sinnvoll weitergearbeitet werden sollte, ohne aber so spezifisch zu sein, dass sie die eigentliche Arbeit vorwegnehmen.

Die Tutorenschulung wurde von Dr. Peter Stender<sup>2</sup> konzipiert und im Vorfeld des hier beschriebenen Lehrlabor-Projekts erstmalig durchgeführt. Im Rahmen des Projekts wurde dann die erste Tutorenschulung evaluiert und auf Basis der Evaluationsergebnisse überarbeitet. Anschließend fand eine zweite Schulung unter der Leitung von Lukas Hodel statt, die ebenfalls evaluiert wurde. Beide Tutorenschulungen, die Evaluationsergebnisse sowie einige ausgesuchte heuristische Strategien werden hier vorgestellt.

## EINLEITUNG

In der ersten Studienphase des Mathematikstudiums haben viele Studierende Probleme mit der eigenständigen Entwicklung von Beweisen. Obwohl dies bekannt ist, existieren in diesem Zusammenhang kaum Betreuungskonzepte. Das Mathematikstudium beginnt üblicherweise mit den Grundvorlesungen *Lineare Algebra I/II* und *Analysis I/II* sowie jeweils begleitenden Übungen. Sowohl in der Vorlesung als auch in der Übung werden mathematische Methoden und Strategien zum Herangehen an Beweise nur implizit behandelt. Diese Lücke aufgreifend, wurden am Fachbereich Mathematik von 2016 bis 2018 lehramtsspezifische Tutorien zur *Linearen Algebra I/II* und *Analysis I/II* durchgeführt, bei denen ein Schwerpunkt das Explizieren der mathematischen Methoden war. Es wurden – basierend auf Vorlesungsinhalten – implizit verwendete heuristische Strategien rekonstruiert und diese in den Tutorien explizit gemacht. Dieser Ansatz war insofern erfolgreich, als dass die Studierenden die heuristischen Strategien nach einiger Zeit gut erinnern und in eigenem mathematischem Handeln rekonstruieren konnten. Daneben wurde die Explikation der Methoden als sinnstiftend wahrgenommen [11].

Die positive Erfahrung mit den realisierten Tutorien legt es nahe, solche Inhalte in Tutorien oder Übungen für alle Studienanfängerinnen und -anfänger der Mathematik zu behandeln. Als erster Schritt in diese Richtung wurde die Idee entwickelt, eine Tutorenschulung anzubieten, in welcher der verwendete Ansatz vermittelt wird. Zielgruppe dieser Schulung sind alle Studierenden (der verschiedenen mathematischen Studiengänge), die planen, zukünftig als Tutorin/Tutor in Tutorien oder Übungen für Mathematik-Studierende zu arbeiten. Eine solche fachspezifische Schulung mit dem Fokus auf heuristische Methoden und Beweisstrategien gab es bisher nicht. Die Hoffnung ist, durch entsprechend geschulte Tutorinnen und Tutoren, die zugrunde liegenden Ideen an möglichst viele Studierende, insbesondere Studienanfängerinnen und -anfänger, zu vermitteln und somit ein breites Bewusstsein für bisher nur implizit behandeltes

---

<sup>2</sup> Früher FB Erziehungswissenschaften der UHH, jetzt Universität Halle-Wittenberg.

Grundlagenwissen zu schaffen.

Im Folgenden werden zunächst exemplarisch einige heuristische Methoden und danach der Ablauf der ersten Schulung im März 2018 beschrieben. Da im Oktober 2018 eine zweite ähnliche Schulung durchgeführt wurde, geht es im vierten Abschnitt um Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Schulungen. Weil die Durchführung der Evaluationen der Schulungen mehr oder weniger identisch und die Ergebnisse ähnlich waren, werden diese im fünften Abschnitt zusammengefasst.

## METHODEN DER MATHEMATIK

Als Methoden der Mathematik werden hier alle Arbeits- und Denkweisen aufgefasst, die bei der Entwicklung mathematischer Erkenntnisse zum Einsatz kommen. Von diesen wird hier ein Ausschnitt beispielhaft dargestellt: Die heuristischen Strategien nach Pólya [10] und anderen werden ausführlicher beschrieben, während Beweisstrategien und „Beweistricks“ nur in Form von Stichworten genannt werden.

### Heuristische Strategien

Heuristische Strategien sind (nach Dörner [1], siehe auch Stender [11]), Verfahren, mit deren Hilfe Lösungen für Probleme gefunden werden können. Im Folgenden werden beispielhaft einige heuristische Strategien beschrieben, die in der Tutorenschulung in ähnlicher Weise präsentiert wurden. Zur Strukturierung dieser Strategien werden Zwischenüberschriften verwendet.

#### Material organisieren

Pólya [10] nennt als ersten Schritt des Problemlösens „Mache einen Plan“, Kießwetter [6] nennt die in dieser Phase auftretenden Denkopoperationen „Material organisieren“. Dies umfasst die gesamte gedankliche Ordnung des Materials, mit der Muster und Strukturen in der untersuchten Situation sichtbar und identifizierbar gemacht werden. „Material“ wiederum umfasst alle in der Problemstellung auftretenden Informationen.

#### Repräsentationswechsel

Ein mathematischer Sachverhalt kann mit unterschiedlichen formalen Ausdrücken oder Visualisierungen dargestellt werden: als Aussagen in „normaler“ Sprache, durch Gleichungen, mithilfe von Bildern, als Diagramme etc.

Die geschickte Auswahl der optimalen Repräsentation ist oft zentral für einen eleganten Beweis. Die Fähigkeit zum flexiblen Wechsel der Repräsentation wird als ein Merkmal mathematischer Begabung angegeben (z. B. [4]). Daraus kann man für diese Strategie zwei Aussagen ableiten:

- Das flexible Wechseln der Repräsentation muss in der Mathematik sehr wichtig sein – sonst würde diese Fähigkeit nicht zu mathematischer Begabung führen.
- Für Lernende wird der flexible Umgang mit Repräsentationswechseln kognitiv anspruchsvoll sein – sonst wäre dies keine besondere Eigenschaft von mathematisch Begabten.

Gelungene Repräsentationswechsel treten in der Mathematik vielfach auf und werden von Lernenden oft als schwierig wahrgenommen.

### **Superzeichen**

Kießwetter [5] hat das Konzept der „Superzeichen“ in die Fachdidaktik der Mathematik eingeführt. Dabei folgte er der Begriffsbildung der Kognitionspsychologie [8]. Ein Superzeichen im Rahmen dieser Theorie ist ein „Zeichen höherer Ordnung, das durch «Superierung», durch (kognitiven) Zusammenschluss von mehreren elementaren Zeichen entsteht (Recodierung, «Komplexbildung» bei Dörner [1]). Ein Superzeichen ist ein Zeichen, das für mehrere Zeichen steht. Jede Menge, jeder Vektor, jede Funktion und vieles mehr kann daher als Superzeichen aufgefasst werden. Dabei treten zwei wesentliche Prozesse auf (für eine ausführliche Beschreibung siehe [11]):

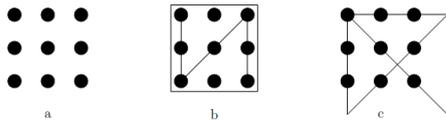
- Ein Superzeichen wird aus mehreren Einzelobjekten gebildet.
- Ein bestehendes Superzeichen wird in Einzelobjekte aufgefaltet.

Superzeichen können auch als eine Zusammenfassung von mehreren mathematischen Operationen auftreten, z. B. beim Summenzeichen, das (in der Regel) mehrere Additionszeichen darstellt. Zur Unterscheidung wird hier der Ausdruck „Prozesssuperzeichen“ verwendet. Prozesssuperzeichen können aber auch verschiedene mathematische Arbeitsschritte zusammenfassen: Eine Gleichung mit einer oder mehreren Unbekannten, die unstrukturiert vorliegt, wird man (oft) zunächst ausmultiplizieren, gleichartige Ausdrücke zusammenfassen und dann z. B. nach Potenzen der Unbekannten sortieren. Jeder der drei angeführten Arbeitsschritte kann dabei aus sehr vielen Einzelschritten bestehen. Mehrere Arbeitsschritte auf diese Weise gedanklich zu einem Prozesssuperzeichen zusammenzufassen und somit in „Metaarbeitsschritten“ zu denken, ist für die Planung von Lösungswegen offensichtlich sehr hilfreich: Bei der Planung von komplexen Lösungswegen können diese dadurch mit wenigen dieser Metaschritte antizipiert werden, anstatt eine deutlich größere Anzahl von Einzelschritten gedanklich vorwegzunehmen. Zusammenfassend gesagt, strukturieren Superzeichen Informationen und ermöglichen dadurch auch, sich diese Information besser zu merken.

Für erfahrene Mathematikerinnen und Mathematiker ist es eine grundlegende Herangehensweise, die gegebenen Voraussetzungen sehr genau zur Kenntnis zu nehmen und nichts implizit hinzuzufügen. Studienanfängerinnen und -anfänger müssen diese Denkweise oft erst erwerben und lernen, keine zusätzlichen Voraussetzungen unbewusst einzufügen, wie z. B., dass ein Vektorraum endliche Dimensionen hat. Die nachfolgende Strategie macht dieses Vorgehen bewusst:

### **Vergrößere den Such-Raum**

Dörner [1] beschreibt diese Strategie mit dem Neun-Punkte-Problem: Sollen alle neun Punkte des in Abbildung 1 gezeigten Punktschemas mit einem Kantenzug aus vier Teilstrecken verbunden werden, so misslingt dies, wenn man versucht, innerhalb des in (b) gezeigten Quadrates zu bleiben, was viele Probanden tun.



(Abb. 1: Neun-Punkte-Problem)

Beim Widerlegen von falschen mathematischen Behauptungen mithilfe von Gegenbeispielen kann es hilfreich sein, diese Strategie bewusst anzuwenden: So findet man Gegenbeispiele oft erst dann, wenn man den „üblichen Raum“ verlässt.

### Beweisstrategien und Standardansätze bei Beweisen

Als Beweisstrategien werden hier diejenigen heuristischen Strategien bezeichnet, die in der Mathematik regelhaft in formaler Sprache verwendet werden. Hier werden nur die wichtigsten genannt, die meist auch in der Lehre explizit behandelt werden. Diese Beweisstrategien haben dabei nicht unbedingt alle das gleiche Abstraktionsniveau, werden hier aber gleichberechtigt dargestellt.

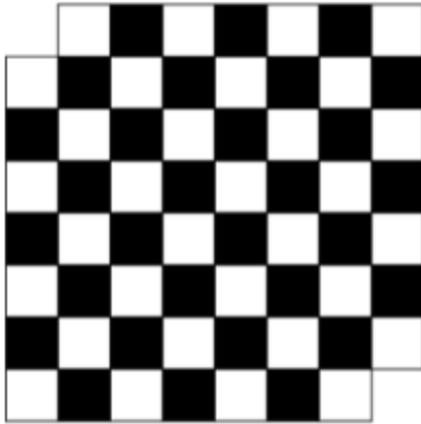
- Direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch
- Vollständige Induktion
- Fallunterscheidung
- Schubfachprinzip
- Extremalprinzip
- Invarianzprinzip

### Invarianzprinzip

Bei dieser Strategie sucht man nach sogenannten Invarianten, d. h. nach Größen, die sich bei der gegebenen Problemstellung nicht verändern. Dieses Verfahren findet besonders in der Graphen- und der Spieltheorie Anwendung. Man versteht das Invarianzprinzip am besten an Beispielen. Wir betrachten ein  $8 \times 8$ -Feld, bei dem zwei gegenüberliegende Ecken „entfernt“ wurden. Ist es nun möglich, dieses Feld mit  $1 \times 2$  Dominosteinen vollständig auszulegen (dabei sollen alle Dominosteine vollständig auf dem Feld liegen und sich nicht überlappen)?<sup>3</sup>

Stellt man sich das gegebene Feld als Schachbrett vor, kann man erkennen, dass sich die Differenz von schwarzen und weißen Feldern nicht verändert – egal wie viele Dominosteine schon auf dem Feld liegen. Das bedeutet, dass am Ende immer zwei gleichfarbige Felder übrig bleiben. Da solche zwei Felder niemals nebeneinanderliegen, ist eine Parkettierung nach den gegebenen Voraussetzungen unmöglich.

<sup>3</sup> In der Mathematik werden solche „Auslegungen“ oft als Parkettierung bezeichnet.



(Abb. 2: Schachbrettproblem)

Deutlich konkreter sind Ansätze, die von Anfängerinnen und Anfängern oft als „Tricks“ wahrgenommen werden. Hier einige Beispiele:

- Substituiere geschickt (dies ist häufig eine Superzeichenbildung)
- Addiere geschickt Nullen/multipliziere geschickt Einsen
- Wähle eine gute Notation [2]
- Arbeite beim Umformen von Gleichungen oder Äquivalenzen vom Schwierigen zum Einfachen

## ABLAUF DER SCHULUNG IM MÄRZ

Die hier beschriebene Tutorenschulung wurde als einwöchiges Blockseminar im März 2018 durchgeführt. Der Lehrumfang betrug zwei SWS; die Studierenden konnten einen unbenoteten Leistungspunkt im Wahlbereich erwerben. Es haben 11 Studierende zwischen dem zweiten und dem achten Fachsemester teilgenommen. Darunter waren etwa je ein Drittel Lehramtsstudierende, Mathematikstudierende und Nebenfachstudierende.

An den drei ersten Tagen der Schulung wurden jeweils drei Blöcke zu je zwei Unterrichtsstunden realisiert:

1. Vortrag mit der Vorstellung von Teilen des theoretischen Konzepts und von Beispielen.
2. Gruppenarbeitsphase, in der die Inhalte des Vortrags angewendet wurden.
3. Vorstellung der Ergebnisse der Gruppenarbeit.

Am vierten Tag fand häusliche Einzelarbeit statt, deren Ergebnisse am fünften Tag in Vorträgen vorgestellt wurden. Die regelmäßige Teilnahme und das Halten des Vortrags am letzten Tag waren die Kriterien für die Vergabe des Leistungspunkts.

Die Veranstaltung zielt im Ansatz darauf ab, Studierende beim Problemlösen zu unterstützen oder im Nachhinein Erklärungen für einen Weg zum mathematischen Beweis hin geben zu können. Diese Erklärungen und Hilfen verwenden im Wesentlichen heuristische Strategien und Beweisstrategien. Diese Heuristiken und Beweisstrategien wurden in den ersten drei Tagen der Schulung in den oben genannten Blöcken behandelt.

In den Gruppenarbeitsphasen wurden Materialien aus den Vorlesungen und Übungen der *Linearen Algebra* und *Analysis* der vergangenen Jahre verwendet. Bei einfachen Sätzen oder Übungsaufgaben wurden nur die Aufgaben, bei komplexeren Situationen auch zusätzlich eine mögliche Lösung bzw. ein möglicher Beweis angegeben. Der Arbeitsauftrag an die Studierenden lautete:

1. Rekonstruiere die bisher vorgestellten Strategien, die in dem vorgelegten Beweis verwendet wurden oder für die Übungsaufgabe benötigt werden.
2. Formuliere Hilfen für Studierende, die an dem entsprechenden Beweis/der Übung arbeiten und an einer Stelle nicht weiterkommen, an der eine der rekonstruierten Strategien benötigt wird.

In der Eigenarbeit am vierten Tag hatten die Studierenden den Arbeitsauftrag, aus dem eigenen Fundus bearbeiteter Übungsaufgaben einzelne auszuwählen und wie in der Gruppenarbeit zu analysieren. Die Ergebnisse dieser Analysen wurden am letzten Tag vorgetragen.

## UNTERSCHIEDE UND GEMEINSAMKEITEN DER BEIDEN SCHULUNGEN

Nach der Evaluation der ersten Schulung wurde diese für den zweiten Durchlauf inhaltlich etwas überarbeitet. Darüber hinaus wurde die zweite Schulung gestrafft und belief sich nur noch auf vier Tage. Dies erwies sich auch aufgrund der geringen Teilnehmerszahl<sup>4</sup> als gute Entscheidung. An der zweiten Schulung nahmen 6 Studierende teil, wobei nicht alle durchgängig dabei waren – ein Studierender kam z. B. erst ab dem zweiten Tag dazu. Im Folgenden werden Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Schulungen beschrieben. Zunächst wird die Struktur der zweiten Schulung im Vergleich zur ersten dargelegt.

Die Vorträge mit der Vorstellung von Teilen des theoretischen Konzepts und Beispielen wurden an den neuen Vortragenden Lukas Hodel angepasst und gekürzt. Durch die Kürzungen konnten die theoretischen Inhalte am ersten Tag der Schulung vollständig abgehandelt werden. Aufgrund der geringen Teilnehmerszahl war es möglich, den zweiten und dritten Block (Gruppenarbeitsphase und Vorstellung der Ergebnisse) jeweils zu einem großen Block zu verschmelzen. Insgesamt wurden drei dieser großen Blöcke realisiert – einer am ersten Tag und zwei am zweiten. Zusätzlich gab es am zweiten Tag einen kurzen Diskurs, in dem Erfahrungen aus Übungsgruppen – z. B. im Hinblick auf Gestaltung, Didaktik und Korrektur – ausgetauscht wurden. Dieser Diskurs wurde als Reaktion auf die Evaluation der ersten Schulung (s. u.) durchgeführt.

Am dritten Tag fand häusliche Einzelarbeit statt, deren Ergebnisse am vierten Tag in Vorträgen vorgestellt wurden. Diese beiden Tage verliefen also ähnlich wie die Tage 4 und 5 der ersten Schulung.

In der zweiten Schulung wurden einige Beispiele und Aufgaben aus der ersten Schulung übernommen; es kamen aber auch viele neue Inhalte – vor allem aus der Geometrie und der Graphentheorie – dazu. Dies bot einerseits die Chance, mehr heuristische Methoden studieren

---

<sup>4</sup> Es scheint grundsätzlich schwierig zu sein, Studierende zu freiwilligen Veranstaltungen (in der vorlesungsfreien Zeit) zu bewegen. Auch der Leistungspunkt, den man für eine Teilnahme bekommen kann, scheint daran nichts geändert zu haben, da Leistungspunkte für Studierende in der Regel nur ab einer Menge von drei interessant sind.

zu können, zum Teil auch aus verschiedenen Perspektiven, und andererseits sorgte es dafür, dass die Teilnehmenden abwechslungsreiche und teilweise neue Inhalte bearbeiten konnten.

## EVALUATION – VORGEHEN UND ERGEBNISSE

Die Tutorenschulungen wurden jeweils etwa ein halbes Semester nach der Durchführung mithilfe von leitfadengestützten Interviews evaluiert. Dabei haben sechs der elf bzw. vier der sechs Teilnehmenden an einem Interview teilgenommen; die anderen Teilnehmenden waren nicht erreichbar. Der Interviewleitfaden enthielt folgende Fragen:<sup>5</sup>

1. An welche Inhalte aus der Veranstaltung – Erklärungen, Aufgaben, Beispiele, Konzepte – erinnerst du dich? (Dabei wurden zunächst freie Antworten abgewartet und dann Stichworte zu Inhalten der Veranstaltung gegeben.)
2. Es wurden auch die Konzepte „Repräsentationswechsel“ und „Superzeichenbildung“ vorgestellt.
  - Erinnerst du dich an diese Ideen und wenn ja, woran besonders?
  - Empfindest du das als hilfreich?
3. Zur Veranstaltung allgemein:
  - Empfindest du die Veranstaltung grundsätzlich als hilfreich?
  - Warum (nicht)?
  - Wie findest du die Beispiele?
  - War die Gruppenarbeit deiner Meinung nach sinnvoll?
  - Wie fandst du die Aufgabe, „eigene“ Probleme zu analysieren und die Ergebnisse zu präsentieren?
4. Waren die Erklärungen in der Veranstaltung verständlich?
5. Angenommen, du würdest noch einmal an so einer Veranstaltung teilnehmen,
  - was würdest du dir zusätzlich wünschen?
  - worauf könnte man verzichten?
  - was sollte bleiben, wie es war?

Die Interviews wurden audiographiert und die Antworten direkt aus der Tonaufnahme heraus ausgewertet. Dabei wurde die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring [7] verwendet. Die Antworten wurden paraphrasiert und aus den Paraphrasen Codes formuliert, die dann zur Codierung führten. Dabei wurde unterschieden nach Antworten, die direkt auf die Frage gegeben wurden, und Antworten, die erst nach zusätzlichen Stimuli erfolgten.

Im Folgenden werden die Resultate aus den Interviews vorgestellt.<sup>6</sup> Das Konzept der Veranstaltung wurde insgesamt als gut beschrieben. Es sei sinnvoll, sich die heuristischen Strategien vor Augen zu führen, sodass einem bewusster wird, vor welchen Problemen Anfängerinnen und Anfänger beim Entwickeln von Beweisen stehen und wie man ihnen dabei helfen kann, diese Probleme zu lösen. Ebenso wurden das Gruppenarbeitskonzept sowie die

---

<sup>5</sup>Der Leitfaden wurde für die zweite Evaluation leicht angepasst. Hier ist eine Art „Vereinigung“ beider Leitfäden dargestellt.

<sup>6</sup>Da die Meinungen der Teilnehmenden beider Schulungen in vielen Punkten ähnlich waren, werden hier die Ergebnisse beider Evaluationen zusammengefasst. Bei Aspekten, die nur mit einer der beiden Schulungen zusammenhängen, wird die betreffende Schulung spezifiziert.

Präsentationen aus den Gruppenarbeiten durchgehend positiv wahrgenommen. Recht einheitlich wurde in den Interviews auch die Analyse an Beispielen und die Arbeit mit den „eigenen“ Problemen – insbesondere auch die Präsentationen – gelobt. Das Gesamtkonzept der Veranstaltung könne so weiter realisiert werden, dies sei eine gute Ausbildung für Tutorinnen und Tutoren.

In den Interviews erinnerten sich die Teilnehmenden an das Konzept der heuristischen Strategien und nannten dabei fast durchgehend die Superzeichenbildung als Beispiel. Auf Nachfrage gaben sie an, dass sie daneben die zentrale Strategie „Repräsentationswechsel“ erinnern. Zu beiden Konzepten konnten unterschiedliche Beispiele gegeben werden. Weitere heuristische Strategien und dazugehörige Beispiele wurden genannt, jedoch streuten diese sehr über die Inhalte der Veranstaltung.

Zu den Konzepten „Superzeichenbildung“ und „Repräsentationswechsel“ waren die Äußerungen in den Interviews heterogen: Einerseits wurden diese als sinnvolle Konzepte bezeichnet, die hilfreich für Erklärungen verwendet werden können. Andererseits wurde betont, dass im Rahmen des bestehenden Übungsgruppenbetriebs keine Zeit sei, solche Konzepte einzuführen und sie zu nutzen. Diese Äußerung ist vor dem Hintergrund zu sehen, dass die Teilnehmenden die Übungsgruppen aus eigener Erfahrung kennen und in Zukunft als Übungsgruppenleiter tätig sein wollen. Einige Befragte betonten, dass die heuristischen Strategien besonders für Vorkurse<sup>7</sup> sehr hilfreich seien, um Tipps für das Weiterarbeiten bei auftretenden Problemen geben zu können. Bezüglich der heuristischen Strategien insgesamt kam das Feedback, dass diese Konzepte im Allgemeinen nicht unbedingt als neu wahrgenommen wurden, dass das explizite Bewusstmachen dieser Konzepte in der Mathematik aber interessant und hilfreich sei, weil dadurch die Möglichkeit bestünde, sie „in Worte zu fassen“, sodass sie für Erklärungen verwendet werden können.

Kritisiert wurde, dass die Veranstaltung nicht genau auf die gegenwärtige Situation des Übungsgruppenbetriebs in Hamburg zugeschnitten war. Da in den Übungsgruppen das Vorrechnen der Übungsaufgaben nahezu die ganze Zeit in Anspruch nimmt, ist dort keine Zeit, um auf heuristische Strategien einzugehen. Dies korrespondiert mit einem Problem bei der Arbeit in der Tutorenschulung: Während der erste Arbeitsauftrag – die heuristischen Strategien aus dem vorgegebenen Material zu rekonstruieren – ausgeführt wurde, war das beim zweiten Arbeitsauftrag – auf Basis der heuristischen Strategien Erklärungen für den Beweis oder Hilfen beim Finden des Beweises zu formulieren – oft nicht der Fall.

Von einigen Teilnehmenden der ersten Schulung wurde geäußert, dass die Veranstaltung zeitlich gestrafft werden könnte. Diese Meinung könnte auch dadurch zustande gekommen sein, dass der Erfahrungsstand der Interviewten sehr hoch war. Gerade die Studierenden aus dem ersten Semester bzw. Lehramtsstudierende nahmen leider an den Interviews (der ersten Schulung) nicht teil. Die Evaluation der (gestrafften) zweiten Schulung legt nahe, dass diese Studierendengruppen eher eine weniger konzentrierte Vorgehensweise bevorzugen würden.

Ferner wurde im Hinblick auf die Realität in den Übungsgruppen der nicht erfüllte Wunsch formuliert, Tipps für eine bessere Durchführung von Übungsgruppen, beispielsweise bei der Anfertigung des Tafelbilds, zu erhalten. Dabei kollidiert die Vorstellung, die heuristischen

---

<sup>7</sup>In dieser Lehrform bearbeiten angehende Studierende Übungsaufgaben unter Betreuung.

Strategien in kürzerer Zeit behandeln zu können, mit der Tatsache, dass keine interviewte Person tatsächlich alle heuristischen Strategien aktiv nennen konnte.

Bei der zweiten Schulung waren zwei der sechs Teilnehmenden Lehramtsstudentinnen. Nicht nur in der Evaluation, sondern auch schon während der Schulung kritisierten diese das Niveau und den Umfang der Veranstaltung – es sei für Lehramtsstudierende insgesamt zu anspruchsvoll und zu umfangreich. Zu schwer gewesen seien insbesondere die behandelten Beispiele und Aufgaben. Fast alle Teilnehmenden der zweiten Schulung und auch einige der ersten hatten erwartet, dass sich während der Schulung ausführlich mit „Tipps für Übungsgruppen“ oder „Didaktik in Übungsgruppen“ beschäftigt wird. Die Befragten der zweiten Schulung – insbesondere die Lehramtsstudentinnen – hatten dazu auch eine Menge konkreter Fragen/Ideen. Dabei ging es hauptsächlich um die Themen „Präsenzaufgaben“ und „Motivation von (verschiedenen Typen von) Studierenden“.

## FAZIT UND AUSBLICK

Die Tutorenschulung wurde insgesamt als hilfreich und sinnvoll wahrgenommen. Die Kritik bezieht sich im Wesentlichen auf die Differenzen zu den Möglichkeiten im gegenwärtigen Übungsgruppenbetrieb, die Erwartungshaltung der Teilnehmenden und die Dauer der Veranstaltung. Die heuristischen Strategien, insbesondere Superzeichenbildung und Repräsentationswechsel, wurden als relevante Konzepte zur Beschreibung mathematischer Vorgehensweisen wahrgenommen und das Potenzial zum Einsatz bei der Erklärung von Mathematik wurde von den Teilnehmenden erkannt.

Von den Lehrenden wurden während der Schulungen u. a. folgende Beobachtungen gemacht: Die Gruppendiskussionen waren sehr intensiv. Dabei kamen auch viele mathematische Diskussionen auf, wie ein bestimmter Beweis am besten zu führen sei. Teilweise ging dies zulasten der Identifikation der heuristischen Strategien. Diese Diskussionen fanden nicht statt, wenn fertige Beweise vorgegeben wurden. Da die mathematischen Überlegungen nicht Ziel der Veranstaltung waren, erscheint es sinnvoll, überwiegend fertige Beweise vorzulegen.

Die heuristischen Strategien wurden jeweils identifiziert und in den Präsentationen gut dargestellt. Die Strategien wurden damit vielfach im eigenen mathematischen Handeln rekonstruiert und bewusst gemacht. Die vorgestellten heuristischen Strategien können also als passender theoretischer Rahmen für die mathematischen Methoden angesehen werden.

Von den Studierenden wurden nur wenige Tipps und Erklärungen mithilfe von heuristischen Strategien formuliert. Die Teilnehmenden waren oft zufrieden, wenn sie die Strategien identifiziert hatten. Hier muss das Format des Arbeitsauftrags noch angepasst werden. Im Interview wurde hierzu ein „Probetutorium“ vorgeschlagen, also eine Form des Rollenspiels zum Einsatz der Erklärung.

Bei einer etwaigen Weiterentwicklung der Veranstaltung sollten die Formulierung von Erklärungen und das Thema „Tipps für Übungsgruppen“ stärker in den Fokus genommen werden. Außerdem sollte beachtet werden, dass die Niveaus der Teilnehmenden sehr verschieden sein können, weshalb die Struktur der Veranstaltung diese Problematik berücksichtigen muss. Darüber hinaus könnte überlegt werden, ob das Format „Blockseminar“ beibehalten wird oder ob ein anderes Format (und ggf. ein anderer Termin) im Hinblick auf die Anzahl der Teilnehmenden, neben den schon genannten Aspekten, sinnvoller sein könnte.

Das Problem, dass in den von den geschulten Tutorinnen und Tutoren durchgeführten Übungsgruppen zu wenig Zeit für die Einführung der heuristischen Strategien ist, kann im Rahmen der Veranstaltung nicht gelöst werden. Hier muss versucht werden, andere Lerngelegenheiten in die Vermittlung der heuristischen Strategien zu integrieren.

Mit der Evaluation der beiden Schulungen konnte nur ein erster Eindruck von der Wirksamkeit gewonnen werden. Inwieweit die einzelnen Strategien von den Teilnehmenden tatsächlich auch langfristig erinnert werden, selbstständig in mathematischem Handeln bewusst gemacht und in der Lehre eingesetzt werden können, konnte nicht erhoben werden.

Es ist vorgesehen, dass das Thema *Tutorenschulungen* im Fachbereich Mathematik diskutiert wird. Die Erkenntnisse des hier beschriebenen Projekts sollen in diese Diskussion einfließen. Wir würden uns wünschen, dass die Schulung (in eventuell veränderter Form) weiterläuft und vom Fachbereich getragen wird. Dafür wäre es auch wünschenswert, wenn möglichst viele Lehrende am Fachbereich mit den Konzepten vertraut gemacht würden. Da prinzipiell alle Lehrenden von ausgebildeten Tutorinnen und Tutoren profitieren, ist bereits eine gute Ausgangslage geschaffen.

## LITERATUR

[1] Dietrich Dörner. *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. 1. Aufl. Stuttgart: Kohlhammer, 1976. isbn: 3-17-001353-X.

[2] Daniel Grieser. *Mathematisches Problemlösen und Beweisen Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013. isbn: 978-3-8348-2459-2.

[3] Lukas Hodel und Peter Stender. *Tutorenschulung in der Mathematik*. Eingereicht bei: Mathematische Semesterberichte.

[4] Friedhelm Käpnick. „Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschul Kinder“. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Hrsg. von GDM. Franzbecker, 2006, S. 59–63. isbn: 978-88120-434-7.

[5] Karl Kießwetter. „Kreativität in der Mathematik und im Mathematikunterricht“. In: *Mathematik lernen*. Hrsg. von Martin Glatfeld. Braunschweig: Vieweg, 1977, S. 1–39. isbn: 3528083840.

[6] Karl Kießwetter. „Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem: Mit Informationen über das Hamburger Modell“. In: *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht* 38.5 (1985), S. 300–306.

[7] Philipp Mayring. „Qualitative Inhaltsanalyse“. In: *Qualitative Forschung: Ein Handbuch*. Hrsg. von Uwe Flick et al. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl., 2010, S. 468–475. isbn: 978-3-499-55628-9.

[8] E. Mittenecker. „Informationstheorie“. In: *Lexikon der Psychologie*. Hrsg. Von M. A. Wirtz. Hogrefe Verlag, 2018. url: <https://portal.hogrefe.com/dorsch/informationstheorie/> (besucht am 27. 04. 2018).

[9] George Pólya. *Vom Lösen mathematischer Aufgaben- Band I: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*. 1. Aufl. Basel: Birkhäuser, 1966.

[10] George Pólya. *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*. 4. Aufl. Sammlung Dalp. Tübingen und Basel: Francke, 2010. isbn: 9783772006081.

- [11] Peter Stender. „Methoden der Mathematik im Lehramtsstudium“. In: *Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung. Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen*. Hrsg. von Barbara Schmidt-Thieme. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2018, S. 0.
- [12] Peter Stender und Ann Sophie Stuhlmann. „Fostering Heuristic Strategies in Mathematics Teacher Education“. In: *PROCEEDINGS of INDRUM 2018 Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Hrsg. von Viviane Durand-Guerrier et al. University of Agder and INDRUM, 2018, S. 547–556. isbn: 2496-1027.