

PD Dr. Ralf Holtkamp, Prof. Dr. Christoph Schweigert  
Fachbereich Mathematik

### 3.3 Unterstützung der mathematischen Anschauung durch Visualisierungen in der Mathematik-Ausbildung für Naturwissenschaftlerinnen und Naturwissenschaftler

Im Modul *Mathematik I für Studierende der Bachelorstudiengänge Geophysik/Ozeanographie, Meteorologie, Physik und Computing in Science* sollte durch die Erarbeitung und Bereitstellung von statischen und dynamischen Visualisierungen im Wintersemester 2012/13 die Bildung von mathematischer Anschauung bei den Studierenden im ersten Studienjahr unterstützt werden.

#### Ausgangslage und Konzept

Bei dem Modul handelt es sich um eines der größten Service-Module der Mathematik für die MIN-Fakultät, das von Studierenden der Fachbereiche Physik und Geowissenschaften sowie einem Teil der Studierenden des Fachbereichs Informatik mit Erfolg belegt werden muss. Das Modul bildet die Grundlage für einen drei-beziehungsweise viersemestrigen Zyklus.

Innerhalb kurzer Zeit sollen die Studierenden einen umfangreichen Satz mathematischer Begriffe beherrschen und mathematische Techniken sicher anwenden können. Insbesondere vor dem Hintergrund unterschiedlicher Schulkenntnisse ist es für die Studierenden eine besondere Herausforderung, eine eigene Anschauung abstrakter mathematischer Begriffe zu bilden. Diese Herausforderung ist durch die Verkürzung der Schulzeit und die faktische Reduktion der Mathematik-Ausbildung an Hamburger Gymnasien unserer Beobachtung nach in den vergangenen Jahren eher größer geworden.

Traditionell sind selbständig bearbeitete Hausaufgaben und deren Besprechung in Kleingruppen das zentrale Element für die Bildung eigener Anschauung. Dies sollte durch das Projekt auch nicht infrage gestellt werden, die zusätzlich erarbeiteten Materialien sind als Ergänzung gedacht.

Bisher wurden im genannten Modul moderne Hilfsmittel der Visualisierung, die Programme wie eine *Java*-Umgebung, *Mathematica* oder *Maple* bereitstellen, zur Bildung einer mathematischen Anschauung nur sporadisch eingesetzt.

Im Rahmen des Projekts sollte deshalb ein Satz von

- **statischen Bildern und Graphiken** und
- **dynamischen Animationen**

für das Modul erstellt werden, um die Studierenden bei der Bildung einer mathematischen Anschauung gezielt zu unterstützen.

Mittlerweile enthalten zwar etliche Seiten der *Wikipedia* Material dieses Typs. Diese sind jedoch in aller Regel von Niveau und Art der Darstellung nicht für die universitäre Lehre geeignet.

Für das Projekt konnten wie vorgesehen zwei Kollegen als Mitarbeiter gewonnen werden, mit denen einer der Antragsteller schon im akademischen Jahr 2011/12 ein Projekt im Rahmen der Reihe „Seminare ans Netz“ durchgeführt hatte – Herr Dipl.-Math. Vincenz Busch und Herr B.Sc. Sebastian Fleischer. Unsere Erwartung, dass das Team in kürzester Zeit arbeitsfähig sein würde, hat sich dann bestätigt.

#### Umsetzung des Lehrprojekts

In einer ersten Arbeitsphase musste sowohl für die statischen als auch für die dynamischen Visualisierungen eine geeignete Software ausgewählt werden.

#### Statische Visualisierungen

Die statischen Visualisierungen sollen in der Vorlesung selbst die Inhalte illustrieren. Eine solche Illustration ist von besonderer Bedeutung in dieser Veranstaltung, die nach wie vor unter ungünstigen äußeren Bedingungen und mit nur einfachster technischer Unterstützung in den zentralen Hörsälen der Universität Hamburg stattfindet. Insbesondere steht keine nennenswerte Tafelfläche wie sonst in Mathematik-Vorlesungen zur Verfügung; deshalb wird üblicherweise in dieser Vorlesung ein in *LaTeX* erstellter Foliensatz verwendet, in dem während der Vorlesung handschriftliche Ergänzungen vorgenommen werden. Eine Erweiterung der Projektionsfläche durch einen zweiten Projektor – wie es in den Physikhörsälen der Fall ist – ist nicht vorhanden. Dadurch kann immer nur die Information je einer Folie präsentiert werden und keine vorhergehenden Folien oder gar begleitende Übersichtfolien. Für die neuen statischen Visualisierungen fiel unsere Wahl auf das Programmpaket *tikz* (siehe etwa <http://de.wikipedia.org/wiki/PGF/TikZ>). Dies ermöglichte eine direkte Einbindung in die *LaTeX*-Quelldateien und damit eine besonders gute Handhabbarkeit. Das stellte einen wichtigen Entscheidungsaspekt dar, da so die Materialien in den Folgejahren problemlos auch von anderen Dozentinnen und Dozenten weiter benutzt werden können.

## Dynamische Visualisierungen

Hierfür fiel, nicht zuletzt aus Kostengründen, die Wahl auf SAGE, ein Open-Source-Programm. Die damit erstellten dynamischen Visualisierungen konnten aus Zeitgründen nur in Einzelfällen direkt in der Vorlesung vorgeführt werden. Meist wurde in der Vorlesung auf die zugehörige Webseite<sup>1</sup> verwiesen und es wurden Anregungen zum selbständigen Arbeiten gegeben.

Bei der Projektumsetzung machte die Wahl der Software Probleme: Der Betrieb von SAGE auf verschiedenen Plattformen erwies sich als arbeitsintensiv. Hier hätten die Projektleiter auch in verschiedenen Situationen professionelle Hilfe benötigt. Leider ändert sich SAGE aktuell von Version zu Version recht stark, was die nachhaltige Nutzung der Materialien in einzelnen Fällen erschwert, wenn nicht gar unmöglich macht.

Die im Rahmen des Projekts entstandenen dynamischen Animationen können alle auf der genannten Webseite eingesehen werden. Wir erläutern nachfolgend einige Beispiele:

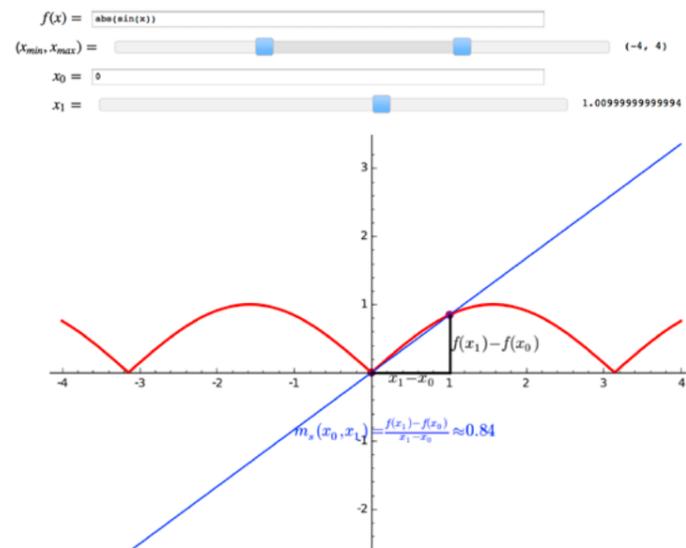


Abbildung 17: Beispiel für eine dynamische Visualisierung zu einem analytischen Thema

In dieser Animation (Abbildung 17) können Studierende selbst nachvollziehen, wie sich der Differenzenquotient der Ableitung annähert. Dies soll zusätzliche

<sup>1</sup> URL: <http://www.math.uni-hamburg.de/master/lehreexport/physik/visualisierung/> [19.09.2014].

Anschauung zum Begriff der Ableitung liefern, der heute nicht mehr verlässlicher Schulstoff ist.

In der nächsten Animation (Abbildung 18) kann eine nicht-triviale geometrische Situation an einer Ursprungsgeraden gespiegelt werden; hierbei kann die Ursprungsgerade von den Studierenden selbst verändert werden.

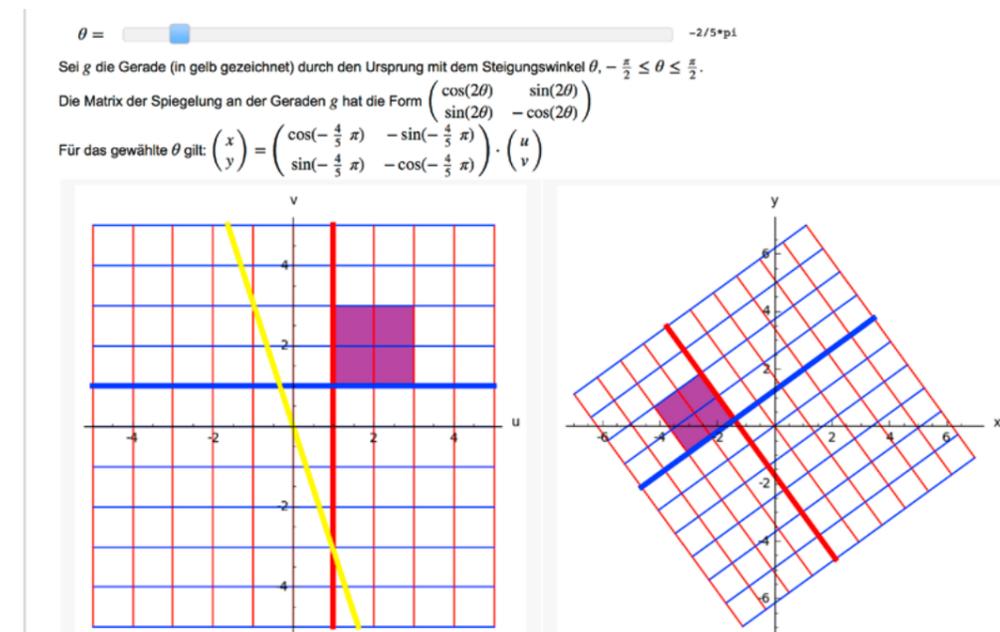


Abbildung 18: Beispiel für eine dynamische Animation zu einem geometrischen Thema

Als Beispiel aus den Vorlesungsfolien zeigen wir zwei Vektorfelder mit Integralkurven, die direkt im Skript errechnet werden und daher von der Dozentin oder dem Dozenten ohne größeren Aufwand auch verändert werden können (Abbildung 19).

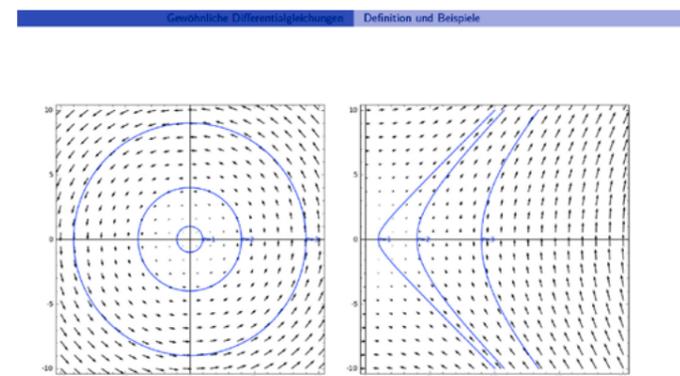


Abbildung 19: Beispiel für eine statische Visualisierung zum Thema Integralkurven

Ein Beispiel für zusätzliche Abbildungen im Skript zeigt Abbildung 20.

**Beweis des Fundamentalsatzes.** Wir benutzen folgendes Lemma:

**Lemma (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann existiert  $\xi \in [a, b]$ , so dass

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

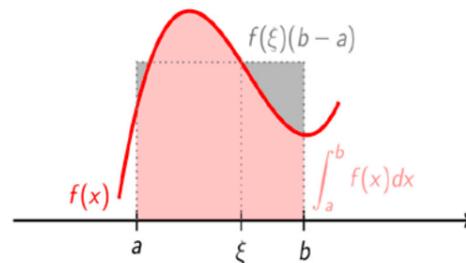


Abbildung 20: Beispiel für zusätzliche Abbildungen in den Vorlesungsfolien

### Fazit und Zukunftsperspektiven

Aus der Evaluation ging hervor, dass die organisatorische Einbindung der neuen Materialien von den Studierenden als gut empfunden wurde. Auch die Erklärung der dynamischen Veranschaulichungen in der Veranstaltung wurde als angemessen und zeitlich sinnvoll angesehen. Ein stärkerer Einsatz der Visualisierungen wurde von den Studierenden ausdrücklich gewünscht, was wir als generelle studentische Akzeptanz des Projektansatzes werten. Entgegen unserer Erwartung gab es in der Evaluation auch die Aussage von Studierenden, dass die Materialien bei der Prüfungsvorbereitung hilfreich seien. Die Maßnahmen wurden als innovativ und für die Studieneingangsphase passend erlebt. Die Studierenden schätzten es, dass mit dem freien System SAGE mit einsehbarem Quelltext gearbeitet wurde.

Als weiteren positiven Effekt der dynamischen Visualisierungen schätzen wir als Dozentinnen und Dozenten zusätzliche mathematische Fragen und Diskussionen zu den Visualisierungen nach der regulären Vorlesung.

Die neu erarbeiteten Materialien haben zur Stärkung der mathematischen Anschauung beigetragen. Das dem Projekt zugrunde liegende Modul stellt erfahrungsgemäß für die meisten Studierenden die größte Hürde in der Studieneingangsphase dar.

Die mathematische Anschauung ist allerdings nur eines von mehreren Problemen in dieser Phase des Studiums. Gezielte Arbeit in hinreichend kleinen Gruppen, betreut von mathematisch gut qualifizierten Dozentinnen und Dozenten (und nicht nur studentischen Hilfskräften) wird auch in Zukunft der wichtigste Beitrag zu studentischem Erfolg sein.

Das Projekt hat in kurzer Zeit sinnvolle zusätzliche Materialien hervorgebracht, die schon nach heutigem Kenntnisstand auch in künftigen Durchführungen des Moduls genutzt werden. Nachhaltigkeit und Transfer sind somit gesichert. Teile des Projekts werden sicher auch in anderen Modulen, etwa für Hauptfachmathematikerinnen und -mathematiker, eingesetzt werden.

Die zusätzlichen Materialien sind sicher hilfreich, können aber erwartungsgemäß nicht alle Probleme der verschiedenen Studierenden in diesem Modul lösen. Insofern müssen die Dozentinnen und Dozenten dieses Moduls auch in Zukunft über weitere Verbesserungsmaßnahmen nachdenken. Hierzu seien die Stichworte Vernetzung mit einem mathematischen Vorkurs und (Online-)Selbsttests zum Einstieg beispielhaft genannt.

Mit Blick auf das Gesamtprojekt Lehlabor halten wir es für sehr sinnvoll – anders als zum Projektstart im Wintersemester 2012/13 umgesetzt – Antragsstellerinnen und Antragstellern die Möglichkeit einer längeren Anlauf- und Planungsphase einzuräumen. Dies ist insbesondere nötig, um die Möglichkeit des Lehlabor, freie Zeit für die Lehrenden zu generieren, um sich dem jeweiligen Projekt zu widmen, zielführend einsetzen zu können. Diese Stärke des Konzepts Lehlabor sollte unbedingt ausgebaut werden. Mit Sicherheit hätte auch unser Projekt von zusätzlicher freier Zeit der beiden Projektleiter profitieren können.